

# Unendlichdimensionales Schach

## 1 Spielfeld

Das Spielfeld ist ein unendlichdimensionaler Kubus der Länge 8. Ein Feld  $x$  hat Koordinaten  $\{x_i\}$ ,  $x_i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$

## 2 Figuren und ihre Züge

Im Folgenden bezeichnet  $\Delta x$  die Differenz zwischen Anfangs- und Zielpunkt eines Zuges. Mit  $\|\cdot\|$  ist die Maximumsnorm gemeint,  $\|x\| \equiv \max\{x_i\}$ . Züge können ausgeführt werden, wenn das Zielfeld nicht von einer eigenen Figur besetzt ist und wenn alle Felder auf der Zuglinie freistehen. Ist das Zielfeld von einer gegnerischen Figur besetzt, so ist diese geschlagen, d.h. eliminiert.

**König:** Der König zieht auf ein beliebiges Feld mit  $\|\Delta x\| = 1$ .

**Dame:** Für den Zug einer Dame wähle man eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{N}$ , eine natürliche Zahl  $a$  und ein  $\Delta x$  mit  $\Delta x_i = 0$  für  $i \notin M$ ,  $|\Delta x_i| = a$  für  $i \in M$ .

**Turn:** Für den Zug eines Turms wähle man ein  $n \in \mathbb{N}$  und ein  $\Delta x$  mit  $\Delta x_i = 0$  für alle  $i \neq n$ .

**Läufer:** Für den Zug eines Läufers wähle man eine natürliche Zahl  $a$  und ein  $\Delta x$  mit  $|\Delta x_i| = a$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

**Springer:** Für den Zug eines Springers wähle man eine **endliche** Teilmenge  $M \subset \mathbb{N}$  und ein  $\Delta x$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\Delta x_i = 0$  für  $i \notin M$ ,
2.  $\|\Delta x\| = 2$ ,
3.  $\sum_{i \in M} \Delta x_i$  ist ungerade.

**Bauer:** Der Bauer zieht, wenn er nicht schlägt, ‘geradeaus vorwärts’, d.h.  $x_1 \rightarrow x_1 + 1$ , alle anderen  $x_i$  gleichbleibend. Falls  $x_1 = 2$ , ist auch  $x_1 \rightarrow x_1 + 2$  möglich.

Der Bauer schlägt ‘schräg vorwärts’, d.h.  $x_1 \rightarrow x_1 + 1$ ,  $\|\Delta x\| = 1$ , mindestens ein  $x_i$  ( $i \neq 1$ ) von null verschieden.

Ein Bauer, der die gegnerische Grundhyperebene ( $x_1 = 8$  bzw.  $x_1 = 1$ ) erreicht, darf in eine beliebige Figur (außer König) umgewandelt werden.

### 3 Grundaufstellung

#### 3.1 Unendliche Grundaufstellung

Sei  $k \equiv (1, 5, 5, 5, \dots)$ ,  $m \equiv (1, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \dots)$ . Der weiße König steht auf dem Feld  $k$ . Weiße Damen stehen auf allen Feldern  $x$  mit  $x_1 = 1$ ,  $x \neq k$  und  $\|x - m\| = \frac{1}{2}$ . Läufer stehen auf allen Feldern  $x$  mit  $x_1 = 1$  und  $\|x - m\| = \frac{3}{2}$ . Entsprechendes gilt für Springer und Türme mit  $\|x - m\| = \frac{5}{2}$  bzw.  $\|x - m\| = \frac{7}{2}$ . Auf allen Feldern  $x$  mit  $x_1 = 2$  stehen weiße Bauern. Die Aufstellung von Schwarz ist analog mit  $x_1 = 8$  bzw.  $x_1 = 7$ .

#### 3.2 Endliche Grundaufstellung

Die Grundaufstellung des gewöhnlichen Schachs wird in der Ebene  $x_3 = x_4 = x_5 = \dots = 5$  reproduziert, d.h. der weiße König steht auf  $(1,5,5,5,\dots)$ , die weiße Dame auf  $(1,4,5,5,\dots)$  etc. Alle anderen Felder bleiben frei.

Andere Varianten sind möglich, z.B. Aufstellung auf einer Randebene  $x_3 = x_4 = \dots = 1$ , oder  $x_3 = x_4 = \dots = 1$  für Weiß und  $x_3 = x_4 = \dots = 8$  für Schwarz.

#### 3.3 Gemischte Grundaufstellung

Wie bei der endlichen Grundaufstellung, aber mit Bauern auf den gesamten Hyperebenen  $x_1 = 2$  und  $x_1 = 7$ .

Weiß beginnt, es wird abwechselnd gezogen, wer den König verliert hat die Partie verloren.

## 4 Denkansätze

#### 4.1 Unendliche Grundaufstellung

Ein remis ist kaum zu vermeiden, da z.B. jeder Bauer von unendlich vielen Springern gedeckt ist. Man kann jedoch über Hilfsmatt-Konstellationen nachdenken. Das Analogon zu 1.f3 e5 2.g4 Dh4 funktioniert nicht, da unendlich viele weiße Springer das Analogon des Feldes f2 besetzen können. Es funktioniert jedoch das Analogon zu 1.f4 f5 2.Kf2 e6 3.Kg3 Df6 4.a3 Dg6 5.Kh4 Dg4.

## 4.2 Endliche Anzahl von Figuren

Welche Mattbilder gibt es mit einer endlichen Anzahl von Figuren? Beispiele wären

- W: K(6,5,5,...) D(7,5,5,...), S: K(8,5,5,...)
- W: K(6,5,5,...) B(7,5,5,...) B(7,4,5,5,...), S: K(8,5,5,...)

Gibt es Mattbilder, bei denen der König nicht am Rand steht? Gibt es Konstellationen endlich vieler Figuren, mit denen sich in endlicher Zeit zwingend ein Matt gegen den alleinstehenden gegnerischen König herbeiführen lässt?

## 4.3 Computer

Inwieweit kann man einem Computer unendlichdimensionales Schach beibringen, wo es häufig unendlich viele inequivalente Zugmöglichkeiten gibt?